*УКООПСПІЛКА*
*УПРАВЛІННЯ КАДРІВ, НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ*
*І ЗАРОБІТНОЇ ПЛАТИ*
*ПОЛТАВСЬКИЙ КООПЕРАТИВНИЙ ІНСТИТУТ*
*КАФЕДРА ФІЗИКИ І МАТЕМАТИКИ*

# НЕСТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ
## З КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
### ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

*ПОЛТАВА – 1998*

УКООПСПІЛКА
УПРАВЛІННЯ КАДРІВ, НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ І ЗАРОБІТНОЇ ПЛАТИ
ПОЛТАВСЬКИЙ КООПЕРАТИВНИЙ ІНСТИТУТ

Кафедра фізики і математики

# НЕСТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ

## З КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

ПОЛТАВА—1998

**Автори:** кандидат економічних наук Бобрищев Олександр Васильович,
кандидат фізико-математичних наук Шурдук Андрій Іванович,
кандидат економічних наук Нічуговська Лілія Іванівна ,
Фомкіна Олена Григорівна, Ванжа Наталія Володимирівна.

**Рецензент:** к.т.н., доцент Енгель П.С.

Розглянуто та схвалено до друку на засіданні
кафедри фізики і математики ПКІ
(Протокол № 10 від 12.01.1998 року)
Рекомендовано до друку навчально-методичною
Радою факультету "Економіка і менеджмент"
Полтавського кооперативного інституту;
(Протокол № 7 від 20.01.1998 року)

# ПЕРЕДМОВА

Написання цього методичного посібника спрямовано на досягнення мети - ознайомити студентів з основами математичного апарату необхідного для розв'язування теоретичних і практичних задач економіки; виробити вміння та навички математичного дослідження прикладних задач, наприклад, побудови економіко-математичних моделей, прищепити студентам уміння самостійно вивчати навчальну літературу з математики та її прикладних питань, дати необхідну математичну підготовку та знання для вивчення інших навчальних дисциплін математичного циклу, таких, наприклад, як "Теорія ймовірностей та математична статистика", "Математичне програмування".

В посібнику приведено 25 завдань, що можуть бути використані викладачами математики як при індивідуальній роботі викладача зі студентами, так і при їх самостійній математичній підготовці.

Слідує відмітити, що деякі задачі чи приклади мають - щодо їх змісту, - нетрадиційний характер, їх умова нестандартного типу; розв'язання таких задач і прикладів потребує від молоді і якості математичної підготовки і в той же час здобуття та навиків прийняття особистих рішень, аналізу та дослідження поставленої проблеми та методів її реалізації, що відповідає зростанню сучасних вимог до підготовки випускників вищої школи, які будуть працювати у галузях народного господарювання в ринкових умовах його функціювання.

Зміст нижче приведених задач відповідає сучасному змісту нормативної навчальної програми з курсу вищої математики для студентів економічних спеціальностей кооперативного вузу.

В кінці цього посібника приводяться розв'язання деяких задач і прикладів, що складають завдання.

Рекомендована література:

1. Лихолетов И.И. Высшая математика.- Минск, 1976.
2. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Физматгиз, 1962,1975.
3. Волощенко А.Б., Лютий О.І. Методичні вказівки та Навчальні завдання для індивідуальної роботи студентів з курсу "Вища математика", - К.1996.
4. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. - М.: Высшая школа, 1982, Ч. I,II.
5. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Высшая математика. - Донецк, Сталкер, 1997.

## ЗАВДАННЯ I

Приклад I. Чи знайдуться такі значення величин $a$, $b$, $c$ і $k$, при яких система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} kX_1 + 3X_2 + X_3 = a \\ 3X_1 + 5X_2 - X_3 = b \\ 5X_1 + kX_2 + 4X_3 = c, \end{cases}$$

I) має єдиний розв'язок; 2) не матиме жодного розв'язку; 3) має безліч розв'язків.

Задача 2. Знайти всюди неперервну функцію $y = f(x)$, що задовільнює умовам: I) $f(3) = 5$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{X^2 + 4} = 5$; 3) $f(-2) = \min f(x) = 4$.

Побудувати графік такої функції.

Задача 3. Площа фігури, що обмежена лініями $y = x^3$ і $y = f(x)$ складає 25 $см^2$. Знайти аналітичний вираз функції $y = f(x)$.

Задача 4. Знайти середні значення чинників $X$ і $Y$, що складають систему несумісних лінійних рівнянь

$$\begin{cases} X + Y = 2 \\ X + 2Y = 3 \\ 3X + 4Y = 6. \end{cases}$$

Приклад 5. Розкласти функцію в ряд Маклорена :

$$\int \cos(X^2)dX.$$

## ЗАВДАННЯ 2

Приклад I. При якому значенні $K$ розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3X + 2Y - 3Z = K \\ 5X + 3Y + 7Z = 5 \end{cases}$$

буде таким, що виконується нерівність: $4X + 9Z > 3Y$ ?

Задача 2. Знайти аналітичний вираз неперервної функції $y = f(x)$, що задовільнює умовам:

$$\text{I) } f(3) = \frac{f(I) + 5}{f(2) + 3}; \qquad \text{2) } f(-3) = \min f(x) = I.$$

Задача 3. Площа фігури, що обмежена лініями $y = x^2$ і $y = f(x)$, де $\int_1^3 f(X)dX = K$, дорівнює 20 $см^2$. Знайти аналітичний вираз функції $y=f(x)$ і будь-яке значення $K$, при якому являється коректною ця задача.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$3y'' + 5y' - 7y = \cos 5x + \sin 3x .$$

Приклад 5. Розкласти функцію в ряд Маклорена:

$$\int \sin(X^3)dX.$$

## ЗАВДАННЯ 3

Приклад I. Чи знайдуться такі значення $a$, $b$ і $c$, при яких система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2bX + 3Y + aZ = 5 \\ 3X + bY + 2Z = 3 \\ aX + Y + cZ = b \end{cases}$$

матиме рішення: $x_o = 1$; $y_o = 3$ і $Z_o = 5$ ?

Задача 2. Знайти аналітичний вираз неперервної функції $y = f(x)$, що задовільнює умовам: I) $\lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)}{X^2 + I} = f(I)$; 3) $f(-2) = \max f(x) = 5$.

Задача 3. Неперервні функції $y = f(x)$ і $y = \alpha(x)$ обмежують фігуру, що має площу рівну 25 $см^2$. Знайти аналітичний вираз таких функцій, якщо відомо, що

$$\lim_{x\to2} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = 3.$$

Приклад 4. Чи збігається числовий ряд, загальний член якого дорівнює

$$U_n = \frac{e^n + n}{n + 3^n}, \ n \in N ?$$

Приклад 5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{3x^2 + 2y^2} .$$

## ЗАВДАННЯ 4

Приклад I. Чи Знайдуться такі значення величин $a$, $b$ і $c$, при яких система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} X + Y + Z = a \\ 2X + Y + Z = b \\ X + 2Y + Z = c \end{cases}$$

має розв'язок $x = x_o$, $y = y_o$ і $z = z_o$, що задовільнює рівності

$$\frac{3x_o + y_o + 5z_o}{7 + 2z_o} = 5 \ ?$$

Задача 2. Знайти аналітичний вираз неперервної функції $y = f(x)$, що задовольняє умові:

$$\frac{f(1) + 3f(2)}{f(3)} = \max f(x) = 2.$$

Задача 3. Площа фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ дорівнює 27 см$^2$. Знайти аналітичний вираз цих функцій, якщо відомо, що $f(2) = \varphi(5) - 3$.

Приклад 4. Розв'язати дифференціальне рівняння: $y' - y\cos x = 0$.

Приклад 5. Розкласти в степеневий ряд функцію $\int \frac{dX}{4 + X^2}$.

## ЗАВДАННЯ 5

Приклад 1. Чи можна знайти одні і ті ж середні значення економічних чинників X, Y і Z, що складають три системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} X + 2Y - Z = 1 \\ 2X + Y + Z = 2 \\ 5X - Y + 3Z = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 5X - Y - Z = 4 \\ 2X + Y + 3Z = 3 \\ 4X - Y - 2Z = 3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} X + Y + Z = 4 \\ 2X - Y - 2Z = 0 \\ 5X + 3Y + Z = 12 \end{cases} \quad ?$$

Задача 2. Знайти аналітичний вираз всюди неперервної функції $y = f(x)$, що задовільнює умовам:

$$1)\ \lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{f(x) + 3} = f(1); \quad 2)\ f(4) = \max f(x) = 7.$$

Задача 3. Фігура, обмежена прямою $y = 0$ і кривою $y = f(x)$ має площу 23 см$^2$. Знайти аналітичний вираз функції $y = f(x)$, якщо відомо, що $f(5) - f'(2) = 4$.

Приклад 4. Знайти суму десяти членів числового ряду, загальний член якого рівний $U_n = \frac{3}{n(n + 1)}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' + 5y'' + 2y' - 8y = 0.$$

## ЗАВДАННЯ 6

Приклад 1. Знайти найменші середні значення економічних чинників X, Y і Z, що складають дві системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4X - Y - Z = 3 \\ X + Y + 2Z = 3 \\ 5X + 3Y - Z = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} X + 2Y + Z = 4 \\ 3X - Y - Z = 4 \\ 5X + 7Y - Z = 8. \end{cases}$$

Задача 2. Знайти аналітичний вираз неперервної функції $y = f(x)$, що задовільнює умовам:

$$1)\ \lim_{x\to 4}\frac{f(x)+5}{2f(x)+3}=4; \quad 2)\ f(-1)=\min f(x).$$

Задача 3. Площа фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$ і $y = \alpha(x)$, дорівнює 70 $см^2$. Знайти аналітичний вираз цих функцій, якщо відомо, що для шуканих функцій справджується рівність

$$\int_3^7 f(X)dX = \int_5^9 \alpha(X)dX .$$

Приклад 4. Розкласти в степеневий ряд функцію $\int X\cos X^2 dX$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$7y'' + 3y' - 10y = e^{4X}.$$

## ЗАВДАННЯ 7

Приклад 1. Використовуючи МНК, знайти наближені розв'язки системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2X + 3Y + 5Z = 12 \\ 2X + 3Y + 5Z = 10. \end{cases}$$

Задача 2. Неперервна функція $y = f(x)$, що задовільнює умовам: 1) $f(x) - 4x + 3 = 0$ при прямуванні значення $x$ до нескінченності; 2) $5f(2) - 3f(1) = 0$. Знайти аналітичний вираз цієї функції та побудувати її графік.

Задача 3. Фігура, обмежена прямою $x = 5$ і кривою $y = f(x)$ має площу 24 $см^2$. Знайти аналітичний вираз хоча б однієї такої функції $y = f(x)$, та побудувати її графік.

Приклад 4. Розкласти функцію $\int X^3 e^X dX$ в ряд Маклорена.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$4y'' - y' = \sin 7x.$$

## ЗАВДАННЯ 8

Приклад 1. Використовуючи МНК, знайти наближений розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} X + 2Y + 3Z - 4t = 10 \\ 2X + Y + Z + t = 7 \\ 5X + 4Y + 5Z - 2t = 18. \end{cases}$$

Задача 2. Неперервна на всій числовій осі функція $y = f(x)$ задовільнює умовам: 1) $f(1) = \min f(x)$; 2) $|f(x)| \leqslant 5$. Знайти аналітичний вираз хоча б однієї із таких функцій.

Задача 3. Фігура, обмежена кривими $y = x^3 - x^2$ і $y = f(x)$, - має площу 50 см$^2$. Знайти аналітичний вираз функції $y = f(x)$ та побудувати її графік.

Приклад 4. Розкласти в степеневий ряд функцію $\int X^2 \sin 3X dX$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(X + 3)(Y - 3)dX + (X^3 + 2X + 3)(Y^2 + 5Y - 1)dY = 0.$$

## ЗАВДАННЯ 9

Приклад 1. Знайти наближений розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} X + 2Y + 3Z = 6 \\ 2X + 4Y + 6Z = 10. \end{cases}$$

Задача 2. Неперервна на всій числовій осі функція $y = f(x)$ задовільнює умовам:

$$1)\ \lim_{x \to 2} \frac{f(x) + 1}{2f(x) + 3} = f(2); \quad 2)\ f'(2) = 7.$$

Знайти аналітичний вираз функції $y = f(x)$ та побудувати її графік.

Задача 3. Площа трикутника дорівнює 17 см$^2$. Цей трикутник має три сторони, що лежать на прямих $2y - 3x - 4 = 0$; $x + 3y - 1 = 0$ і $ax + by + c = 0$, відповідно. Знайти значення $a$, $b$ і $c$, що входять до прямої, на якій лежить третя сторона цього трикутника.

Приклад 4. Розкласти в степеневий ряд функцію $\int \operatorname{arctg}\sqrt{X}\, dX$.

Приклад 5. Обчислити: $\int_0^1 dx \int_0^1 (x + y)dy$.

## ЗАВДАННЯ 10

Приклад 1. Знайти екстремальні значення заданої неявно функції $Z$ від змінних $X$ і $Y$: $X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X + 2Y - 4Z - 10 = 0$.

Задача 2. Знайти аналітичний вираз неперервної функції $y = f(x)$, що задовільнює умовам:

$$1)\ \lim_{x \to 4} \frac{5f(x) + 3}{f(x) + 7} = 5; \quad 2)\ f(1) = \min f(x).$$

Задача 3. Знайти відстань між прямими

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{5} \quad і \quad \frac{x+3}{-6} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-5}{-10}.$$

Приклад 4. Дві криві $y = f(x)$ і $y = \alpha(x)$ утворюють фігуру, площа якої дорівнює 10 см². Знайти аналітичний вираз цих функцій, якщо відомо, що $f'(2) = \alpha'(3)$.

Приклад 5. Знайти область існування функції

$$Z = \ln\frac{2x-y}{x+3y} + \cos\sqrt{x+3y}\ .$$

## ЗАВДАННЯ 11

Приклад 1. Знайти найменші значення X, Y і Z, якщо

$$\begin{cases} 2X - Y - 3Z = 5 \\ X + 2Y + 4Z = 7. \end{cases}$$

Задача 2. Показати, що існує однозначна функція $y = y(x)$, що визначається рівнянням $y^3 + 3y = x$; знайти її похідну $dy/dx$.

Задача 3. Пряма $3x + 2y = 6$ і парабола $y = ax^2 + bx + c$ утворюють фігуру, площа якої дорівнює 56 см². Знайти значення a, b, і c, що входять до рівняння даної параболи.

Приклад 4. Розкласти в степеневий ряд функцію $\int\sqrt{X}\cos X^3 dX$.

Приклад 5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x - y + 3}{2x + 3y + 7}.$$

## ЗАВДАННЯ 12

Приклад 1. Знайти найменші середні значення невідомих X, Y і Z, що входять до складу двох несумісних систем лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3X + Y + Z = 5 \\ X + 2Y + Z = 7 \\ 5X + 5Y + 3Z = 10, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4X - Y - Z = 2 \\ 2X + 3Y + 5Z = 10 \\ 10X + Y + 3Z = 16. \end{cases}$$

Задача 2. Методами диференціального числення, дослідити та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

Задача 3. При яких значеннях a і b площа круга, що задається рівнянням його кола $x^2 + ax + y^2 + by = 2$, дорівнює $31\pi$ см² ?

Приклад 4. Розкласти в степеневий ряд функцію $\int\sqrt{X}\cdot e^X dX$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$3y'' - 2y' - y = e^{x}\cdot\cos 7x.$$

ЗАВДАННЯ 13

Приклад 1. Знайти наближений розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3X + Y + 4Z + u = 5 \\ 2X + Y + Z + 2u = 6 \\ 8X + 3Y + 9Z + 4u = 13. \end{cases}$$

Задача 2. Знайти аналітичний вираз неперервної функції $y = f(x)$, що задовільнює умовам:

$$1)\ \lim_{x\to 5}\frac{f(x) + f'(x)}{x^2 + 1} = -2\ ; \qquad 2)\ f(2) = 2f(1).$$

Задача 3. Фігура, обмежена кривими $y = x^3 - x^2$ і $y = f(x)$, - має площу 50 см². Знайти аналітичний вираз функції $y = f(x)$ та побудувати її графік; відомо, що $f(1) > 0$.

Приклад 4. Знайти $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$, якщо $Z = X^2\sin Y + Y^2\cos X$.

Приклад 5. З точністю до 0,001 знайти $\int\limits_0^{0,4}\cos X^2 dX$.

ЗАВДАННЯ 14

Приклад 1. Чи існує такі значення X, Y, Z і t при яких виконується рівність

$$\begin{vmatrix} X & 2 & 4 & t \\ 1 & 3 & Y & 7 \\ Z & 1 & 5 & 3 \\ 2 & t & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{причому } 4X + 2Z = 5t - Y\ ?$$

Якщо так, то знайти їх значення.

Задача 2. Знайти найменші значення X, Y і Z, що складають систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3X - Y + 2Z = 7 \\ 2X + 3Y + Z = 5. \end{cases}$$

Задача 3. Площа трикутника дорівнює 60. Знайти рівняння його сторін, якщо відомо, що одна з його сторін проходить через точку N(5;3), а інша сторона через точку M(2,1). Побудувати рисунок.

Приклад 4. Чи знайдется таке значення t, при якому

$$\int_{1}^{t} \frac{x + \ln^2 x}{x} dX = 9 \text{ ?}$$ Якщо так, то знайти таке значення.

Приклад 5. Знайти аналітичний вираз неперервної функції $y = f(x)$, що задовільнює умовам:

$$1)\ \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f'(x)}{x - f(2)} = 5; \quad 2)\ f(7) = f(3).$$

Побудувати графік такої функції.

## ЗАВДАННЯ 15

Приклад 1. Дано визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Знайти визначник, - рівний по значенню, - даному.

Задача 2. Знайти функцію $y(x)$, якщо відомо, що

$$\lim_{x \to 2} y(x) = 7; \quad \lim_{x \to 5} \frac{f(x)}{y(x)} = 2; \quad f'(x) = 2x + 5.$$

Побудувати її графік.

Приклад 3. Привести приклад функції $y = f(x)$, для якої $f'(f'(1)) = 1$.

Задача 4. Знайти такі значення a, b, c, для яких виконуються рівності

$$\int_{a}^{b} X dX = 4; \quad \int_{a}^{c} X e^{X} dX = \frac{2}{e} - 1; \quad \int_{a}^{b} dX = 4.$$

Приклад 5. Записати такий числовий ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, для якого $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$. Визначити його збіжність.

## ЗАВДАННЯ 16

Приклад 1. Знайти матрицю X, якщо відомо, що

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Знайти функцію $y = f(x)$, для якої виконуються умови:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to 1} (f(x) + x^2) = 0.$$

Побудувати її графік.

Задача 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{f(x)}$, якщо $f(5) = 0$, $f'(x) = 8x$. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ?

Приклад 4. Знайти такі функції $y = f(x)$ і $x = g(y)$, щоб система рівнянь

$$\begin{cases} 2f'(x) + g''(y) = 10 \\ f''(x) + 3g'(y) = 16. \end{cases}$$

мала розв'язок $x = 1$; $y = 2$.

Приклад 5. Побудувати криволінійну трапецію, площа якої дорівнює 64 кв.од. довжини.

## ЗАВДАННЯ 17

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & y & x^2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -z & 4 & 5 \end{vmatrix}$, де x, y, z –

розв'язок системи $\begin{cases} 2X - 5Y + 2Z = 0 \\ X + 4Y - 3Z = 0 \end{cases}$.

Задача 2. Знайти функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = g(3)$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = f(3)$. Побудувати їх графіки.

Задача 3. Чи існують такі значення $a$, $b$, при яких $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5\sin ax}{b\sin x} = a$ і $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin bx}{a\sin x} = b$. Якщо так, то знайти їх.

Приклад 4. Знайти хоча б одну функцію $y = f(x)$, для якої виконуються умови:

$$f''(2) - 5f'(1) + f(3) = 3f'(5) - 2; \qquad \int_0^2 f(x)dx = 14.$$

Приклад 5. Привести приклад степеневого ряду, що збігається в інтервалі $(-1/3; 1/3)$.

## ЗАВДАННЯ 18

Приклад 1. Знайти матриці А і В, для яких виконується рівність:

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Задача 2. Скласти систему лінійних рівнянь з пятьма невідомими, якщо ця система має слідучі розв'язки:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 5, \quad x_5 = 6.$$

Задача 3. Побудувати графік функції $y = f(x)$, якщо відомо, що

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)}{3X^2} = 1; \qquad f'(2) = 3.$$

Приклад 4. Побудувати криволінійну трапецію, площа якої дорівнює площі еліпса $X^2 + 4Y^2 = 16$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$4y'' + 3y' - 7y = \sin^2 7x.$$

## ЗАВДАННЯ 19

Приклад 1. Записати матрицю розмірності $3 * 3$, якщо відомо, що визначник, який відповідає їй дорівнює 112.

Задача 2. Чи має додатні розв'язки система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2X + 3Y + 5Z + u = 7 \\ -X + 2Y + 10Z + 7u = 30\ ?. \end{cases}$$

Якщо так, то знайти хоча б один із таких розв'язків.

Задача 3. Відомо, що функція $y = f(x)$ проходить через точку $A(1, 3)$, причому $\lim\limits_{x\to 2} [f(x)]^{2x-3} = e^2$. Знайти аналітичний вираз цієї функції та побудувати її графік.

Приклад 4. Знайти такі значення $a$, $b$, при яких

$$\int_a^b (2X + 1)^2 dX = -\frac{1}{3}.$$

Приклад 5. Записати числовий ряд, один із членів якого рівний $\frac{3}{7}$ та дослідити його на збіжність.

## ЗАВДАННЯ 20

Приклад 1. Знайти корінь рівняння $X^3 - 3X + 1$ з точністю до 0,01.

Приклад 2. Знайти власні вектори перетворення

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|$$

Задача 3. Знайти координати точки перетину прямої

$$\begin{cases} 4X - Y - 7Z = 5 \\ 2X + 3Y + 5Z = 2 \end{cases}$$

з площиною $5x + 9y - 11z - 2 = 0$.

Задача 4. Знайти аналітичний вираз неперервної функції $y = f(x)$, що задовільнює умовам:

$$1)\ \int_1^3 f(X)dX = 7\ ; \qquad 2)\ f''(8) - f'(4) = 2.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$7y''' - 8y'' + y' = 0.$$

## ЗАВДАННЯ 21

Приклад 1. Знайти матрицю, ортогональну до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Задача 2. Дана матриця A. 1) При якому значенні X, - одне із власних чисел матриці A, дорівнює $\lambda = 1$. 2)Знайти всі власні числа матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & X & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача 3. Побудувати графік функції:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 1 - p, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases} \qquad \text{де } 0 < p < 1.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$\int_{2^{1/2}}^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{12}$$

Приклад 5. Знайти перші п'ять членів ряду Тейлора для функції в околі точки $x = 0$: $y = \ln(1 + e^x)$.

## ЗАВДАННЯ 22

Приклад 1. Знайти матрицю, ортогональну до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача 2. Дана матриця A. 1) При якому значенні X, - одне із власних чисел матриці A, дорівнює $\lambda = 1$. 2)Знайти всі власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 4 & x & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Побудувати графік функції:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + 1}, & x \leq 4 \\ (x-4)^2 + 1/17, & x > 4. \end{cases}$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$\int_1^x \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}} = 2.$$

Приклад 5. Знайти перші п'ять членів ряду Тейлора для функції в околі точки $x = 0$: $y = e^{\cos x}$.

## ЗАВДАННЯ 23

Приклад 1. Знайти матрицю, ортогональну до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Дана матриця A. 1) При якому значенні X, - одне із власних чисел матриці A, дорівнює $\lambda = 1$. 2)Знайти всі власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Побудувати графік функції:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{b-a} - \dfrac{2}{(b-a)^2}\cdot|a + b - 2x|, & \text{якщо } x \in [a; b]; \\ 0, \text{ якщо } x \notin [a; b]; & \text{де } a < b. \end{cases}$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$\int_{1/2}^x \frac{x^3dx}{(5/8 - x^4)\cdot\sqrt{5/8 - x^4}} = \frac{4}{3}.$$

Приклад 5. Знайти перші п'ять членів ряду Тейлора для функції в околі точки $x = 0$: $y = e^{\sin x}$.

## ЗАВДАННЯ 24

Приклад 1. Знайти матрицю, ортогональну до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Дана матриця A. 1) При якому значенні X, - одне із власних чисел матриці A, дорівнює $\lambda = 1$. 2)Знайти всі власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x & -1 \\ -7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Побудувати графік функції:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases} \qquad \text{де } \lambda > 0.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$\int_{-\pi/2}^{x} \frac{dx}{1 + \cos x} = 2.$$

Приклад 5. Знайти перші п'ять членів ряду Тейлора для функції в околі точки $x = 0$:

$$y = \sqrt{1 + x^2}$$

ЗАВДАННЯ 25

Приклад 1. Знайти матрицю, ортогональну до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Дана матриця A. 1) При якому значенні X, - одне із власних чисел матриці A, дорівнює $\lambda = 1$. 2)Знайти всі власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ x & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Побудувати графік функції:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}, \text{ якщо } X \in R.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \frac{\pi}{6}.$$

Приклад 5. Знайти перші п'ять членів ряду Тейлора для функції в околі точки $x = 0$:

$$y = e^{x} \cdot \sin x.$$

## Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти аналітичний вираз неперервної функції $y = f(x)$, що задовільнює умовам:

$$1)\ \frac{f(3) + 5}{f(1) + 3} = 4; \qquad 2)\ f(5) = \min f(x) .$$

Рішення. Функція $y = \left[(x - 1)(x - 3)(x - 5)\right]^2 + a$ вимозі 2) задовільнює, адже $f'(5) = 0$ і $f''(5) > 0$ і тому стаціонарна точка $x = 5$ є точкою мінімума; так як $f(3) = a$; $f(1) = a$, то умова 1) дає співвідношення:

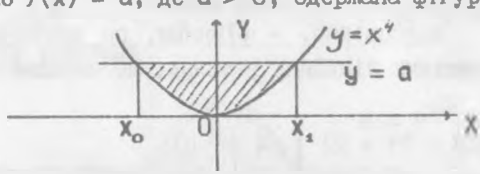
$$\frac{a + 5}{a + 3} = 4, \text{ звідки } a = -\frac{7}{3} \text{ і тому}$$

$y = \left[(x - 1)(x - 3)(x - 5)\right]^2 - \frac{7}{3}$ – шукана функція.

Примітка. Аналітичних виразів функцій, що відповідають заданим в задачі умовам можна побудувати безліч. Наприклад, функція $y = (x - 5)^2 - \frac{67}{3}$ також відповідає умовам 1) і 2); аналогічно, відповідає умовам і функція $y = \sin^2(x - 1)(x - 3)(x - 5) - \frac{7}{3}$ .

Задача 2. Площа фігури, обмежена лініями $y = x^4$ і $y = f(x)$, дорівнює 1,6. Знайти аналітичний вираз функції $y = f(x)$.

Рішення. Візьмемо $f(x) = a$, де $a > 0$; одержана фігура




така, що її площа дорівнює

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (a - x^4)dx = a(x_1 - x_0) - \frac{1}{5}(x_1^5 - x_0^5).$$

Так як нижньою межою інтегрування є $x_0 = -\sqrt[4]{a}$ , а верхньою $x_1 = \sqrt[4]{a}$ , то маємо

$$2a\sqrt[4]{a} - \frac{2}{5}a\sqrt[4]{a} = 1,6 \ ; \ \frac{8}{5}a\sqrt[4]{a} = 1,6 \ , \text{ звідки } a = 1.$$

Отже фігура, що обмежена лініями $y = x^4$ і $y = 1$ має площу, що дорівнює 1,6 (кв.од.довж.) і тому пряма $y = 1$ є шуканим аналітичним виразом функції $y = f(x)$.

Приклад 1. Знайти спільні середні значення величин X і Y, що складають дві несумісні системи лінійних рівнянь:

$$(1)\quad \begin{cases} 4X + Y = 5 \\ 3X + Y = 6 \\ 6X + 5Y = 10 \end{cases} \quad і \quad (2)\quad \begin{cases} 2X + Y = 4 \\ 3X + 2Y = 6 \\ 5X + Y = 6 \end{cases}.$$

Рішення. Легко переконатися, що знайшовши наближені значення X і Y, відповідно, в системі (1), а потім в системі (2), - користуючись при цьому, - методом найменших квадратів, ми одержемо різні значення величин X, Y у відповідних системах. Тому поступимо слідуючим чином. Система (1) є несумісною системою лінійних рівнянь і тому запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} 4X_1 + Y_1 = 5 \\ 3X_2 + Y_2 = 6 \\ 6X_3 + 5Y_3 = 10 \end{cases},$$

додавши одержані рівності, маємо

(3) $13\bar{X} + 7\bar{Y} = 21$, де $\bar{X} = \dfrac{4x_1 + 3x_2 + 6x_3}{13}$ і $\bar{Y} = \dfrac{y_1 + y_2 + 5y_3}{13}$ - середні значення невідомих x і y в (1); аналогічно поступивши з системою (2), одержуємо лінійну залежність між середніми значеннями x і y в системі (2):

(4) $$10\bar{X} + 4\bar{Y} = 16.$$

За умовою задачі середні значення величин x і y в системах (1) і (2) повинні бути, - відповідно, - рівними, по значенню між собою. Тому, розв'язуємо систему лінійних рівнянь, що складається з рівнянь (3) і (4), -

$$+\begin{cases} 13\bar{X} + 7\bar{Y} = 21 \\ 10\bar{X} + 4\bar{Y} = 16 \end{cases} \left|\begin{matrix} -4 \\ 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -10 \\ 13 \end{matrix}$$

$$18\bar{X} = 28\ ,\ \bar{X} = 14/9;\ -18\bar{Y} = -2,\ \bar{Y} = 1/9.$$

Отже, $\bar{X} = 14/9$, і $\bar{Y} = 1/9$ є шуканими середніми значеннями для системи (1) і (2).

Приклад 2. Знайти, використовуючи МНК, наближений розв'язок системи лінійних рівнянь

$$(I)\quad \begin{cases} X + 2Y = 4 \\ X + 2Y = 1 \end{cases}$$

Рішення. Функцію $F = (x + 2y - 4)^2 + (x + 2y - 1)^2 + \alpha x^2 + \beta y^2$, де $\alpha \geqslant 0$ – параметр регуляризації, дослідимо на мінімум, який вона має в точці де

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial X} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial Y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X + 2Y - 4 + X + 2Y - 1 + \alpha X = 0 \\ 2X + 4Y - 8 + 2X + 4Y - 2 + \alpha Y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2 + \alpha)X + 4Y = 5 \\ 4X + (8 + \alpha)Y = 10; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+\alpha & 4 \\ 4 & 8+\alpha \end{vmatrix} = 10\alpha + \alpha^2; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8+\alpha \end{vmatrix} = 5\alpha;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+\alpha & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 10\alpha;$$

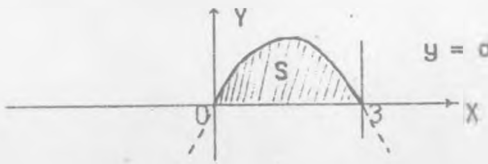
$$X = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\Delta_1}{\Delta} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{5\alpha}{\alpha(10+\alpha)} = 0,5;$$

$$Y = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\Delta_2}{\Delta} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{10\alpha}{\alpha(10+\alpha)} = 1.$$

Відповідь $X = 0,5$ і $Y = 1$ – наближений розв'язок системи (I) по МНК.

Задача 3. Знайти аналітичний вираз ліній, що зображають криволінійну трапецію, площа якої дорівнює 30 (кв. од.).

Рішення. Нехай лінії $Y = 0$, $X = 3$ і $f(x) = aX^2 + bX + c$ зображають таку криволінійну трапецію.




Тоді маємо $S = \int\limits_0^3 (aX^2 + bX + c)dX = \left(a\,\frac{X^3}{3} + \frac{b}{2}X^2 + cX\right)\Big|_0^3 = 9a +$ $+ 4,5b + 3c = 30$, так як при $x = 0$ маємо $y = 0$, звідки $c = 0$; при $x = 3$ одержуємо $9a + 3b + c = 0$, то маємо систему, відносно невідомих коефіцієнтів $a$, $b$ і $c$ рівняння параболи $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 9a + 4{,}5b + 3c = 30 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9a + 4{,}5b = 30 \\ 3a + b = 0\ , \end{cases}$$ звідки

$b = 20$, $a = -20/3$ і, отже $f(x) = -\frac{20}{3}x^2 + 20x$ - шуканий аналітичний вираз параболи.

Задача 4. Знайти аналітичний вираз функції $y = f(x)$, якщо відомо, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5x}\right)^{f(x)} = e^5$$

Рішення. Відома друга чудова границя

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}72$; використаємо цю рівність для розв'язання

нашої задачі. Так як $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5x} = \frac{x^2 + 5x - 3x + 1}{x^2 + 5x} = 1 + \frac{1 - 3x}{x^2 + 5x}$,

причому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1 - 3x}{x^2 + 5x}\right)^{\frac{x^2 + 5x}{1 - 3x}} = e$, і тому маємо рівність

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1 - 3x}{x^2 + 5x}\right)^{\frac{x^2 + 5x}{1 - 3x}}\right]^5 = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1 - 3x}{x^2 + 5x}\right)^{\frac{x^2 + 5x}{1 - 3x}}\right]^5 = e^5,$$

звідки $f(x) = \frac{5x^2 + 25x}{1 - 3x}$ - шукана функція.

**Нестандартні задачі.**
Підписано до друку 6. 05. 98 р.Формат 60x84 $^1/_{16}$. Папір писальний.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 1,06. Тираж 150 екз. Зам. № 2064.
Криворізька міська друкарня.
324200, м. Кривий Ріг, ГСП-3, пр. Металургів, 28.